

République Algérienne Démocratique Et Populaire

Université Mohamed Boudiaf De M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du **Diplôme de MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Equations aux dérivées partielles et application

Par

charik rahma

Sujet

**strict, classical and mild solutions of
abstract differentiel equations**

Date de soutenance :

Devant le jury :

Président : Sengouga Abdelmouhcene

MCA, Université de M'sila

Encadreur : Amroune Nasreddine

MAB, Université de M'sila

Examineur : Mokhtari Abdelhak

MAB, Université de M'sila

Promotion :2017-2018.

Remerciement

Nous tenons tout d'abord à remercier **Allah** le tout puissant de nous avoir donné le courage et la patience pour mener à bien ce modeste travail, qu'il soit béni et glorifié. Je tiens à remercier tous les enseignants qui ont contribué à ma formation de professeurs primaires, intermédiaires , secondaires et universitaires sans oublier de m'apprendre les premières lettres du professeur du Coran. J'adresse également ma remerciement à Mr AMROUNE N, pour avoir accepté d'être ma encadreur. je le remerciai aussi pour ses conseils, ses corrections et ses orientations. Et les grands remerciements et la grandeur attachés à ma famille qui m'a soutenu dans les positions les plus difficiles de ma vie et m'a incité à continuer et à progresser.

Je vous remercie tout mon donne moi un conseil.

Merci

Table des matières

Notations	iii
1 Notions fondamentales et préliminaires	1
1.1 Espace de Hölder	1
1.2 Opérateurs linéaires fermés	2
1.2.1 Graphe, ensemble résolvant, spectre et résolvante	2
1.3 L'intégrale de Dunford	3
1.3.1 Formule de Cauchy	3
1.3.2 Intégrale de Dunford-Riesz	3
1.4 Semi-groupe analytique	3
1.4.1 Générateur infinitésimal	4
1.4.2 Théorème de Hille-Yosida	8
1.5 Opérateur sectoriel	10
1.6 L'espace d'interpolation	12
1.6.1 Espace de Moyenne	12
2 Problème de Cauchy abstrait	14
2.1 Solution stricte et classique	14
2.2 Solution mild	15
2.3 Comparaison entre la solution stricte, classique et mild	18
2.4 La solution classique et mild dans le cas où $f \in L^1((0, T); X)$	24
2.5 Existence, unicité et régularité	26
2.6 Applications	34
3 Les différentes solutions d'une EDA de second ordre	37
3.1 Position du problème et Hypothèses	37
3.2 Les types des solutions du problème (3.1)	38
3.3 Résultat principal	38
3.4 Application	39
Références	41

Notations

- X Espace de Banach avec sa norme $\|\cdot\|$
- $D(A)$ Le domaine de l'opérateur linéaire A
- $L(X)$ L'espace des opérateurs linéaires bornés(continues) de X dans X
- I L'opérateur identité sur X
- $(T(t))_{t \geq 0}$ Une famille à un paramètre d'opérateurs linéaires bornés de X dans X
- $\rho(A)$ L'ensemble résolvant de l'opérateur A
- $R(\lambda, A)$ La résolvante de A en $\lambda \in \rho(A)$
- $C(\overline{\Omega})$ Espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$, muni de la norme

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|$$

- $S_{\theta, w}$ Le secteur d'angle θ et de constante w

- \sum_{α} Le secteur d'angle α

Soit J un intervalle quelconque de \mathbb{R}

- $B(J; X)$ L'espace des fonctions bornées, muni de la norme

$$\|f\|_{B(J; X)} = \sup_{x \in J} \|f(x)\|_X$$

- $C(J; X)$ L'espace des fonctions continues, muni de la norme

$$\|f\|_{C(J; X)} = \|f\|_{B(J; X)}$$

- $C^k(J; X)$ L'espace des fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre k sont continues

et bornées, muni de la norme $\|f\|_{C^k(J; X)} = \sum_{i=0}^k \|f^{(i)}\|_{B(J; X)}$ avec $k \in \mathbb{N}$

- $C_b(J; X)$ L'espace des fonctions continues et bornées $C(J; X) \cap B(J; X)$

- $D_A(\gamma, \infty)$ L'espace d'interpolation

- $L^p(J; X)$ L'espace des p intégrable au sens de Bochner

Introduction

Dans ce mémoire on s'intéresse par les différentes types des solutions (classique, stricte et mild) pour des équations différentielles abstraites du premier et deuxième ordre.

Les équations différentielles abstraites sont des équations différentielles dont les coefficients sont des opérateurs (non bornés mais au moins fermés) sur un espace de Banach.

De nombreux auteurs ont étudié ce genre d'équations ; citons en premier les travaux de E.Hille et Nagy 1938. En 1948 ; E.Hille et K.Yoshida ont résolu le problème de Cauchy abstrait suivant

$$(PCH) \begin{cases} u'(x) = Au(x), & x \in (0, +\infty) \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

où A est un opérateur linéaire fermé sur un espace de Banach X , $u_0 \in X$. La résolution de problème de Cauchy homogène (PCH) a permis d'associer à l'opérateur A , un opérateur linéaire borné e^{xA} pour tout $x \geq 0$, ce qui est connu par la théorie des semi-groupes.

On peut écrire plusieurs problèmes d'EDP sous la forme du problème de Cauchy abstrait ; plutôt équation différentielle abstraite, par exemple ; l'équation de la chaleur dans le cas linéaire s'écrit sous la forme suivante

$$(1) \begin{cases} u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) + f(t, x), & 0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq T, \\ u(t, 0) = u_{t,1} = 0 & 0 \leq t \leq T, \\ u(0, x) = u_0(x) & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

u est inconnue, f et u_0 sont des donnés. On peut transmettre le problème (1) à une équation d'évolution dans un espace de Banach X . On considère le problème (1) et soit

$$u(t, \cdot) = U(t), \quad f(t, \cdot) = F(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

pour tout $t \in [0, T]$, $U(t)$ et $F(t)$ deux fonctions continues dans X .

Le choix de l'espace de Banach X dépend du type de la solution ou les propriétés de sa régularité. Si f et u_0 sont deux fonctions continues, alors il est naturel de prendre $X = C([0, 1])$. Ainsi, on écrit (1) par l'équation d'évolution sur X comme suit

$$(2) \begin{cases} U'(t) = AU(t) + F(t), & 0 < t \leq T, \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

Où A est la dérivée second avec des conditions aux limites de type Dirichlet dans X . Le problème (2) est appelé le problème de Cauchy abstrait non-homogène sur l'espace $C([0, 1])$.

Le mémoire est composé de trois chapitres.

Chapitre 1 On donne ici certains rappels et certains notions sur les outils principaux qui ont été utilisée. Dans un premier temps, on parle des espaces de Hölder et leurs propriétés, puis on rappellera quelques résultats classiques de la théorie des semi-groupes. Ainsi, on présentera des opérateurs sectoriels et leurs propriétés. A la fin de ce chapitre, on introduit les espaces d'interpolations.

Chapitre 2 On étudie dans le deuxième chapitre les différentes types des solutions du problème de Cauchy abstrait non-homogène dans le cadre Hölderien et le cadre L^1 .

Plus précisément, la solution stricte, classique et mild pour que f dans l'espace de Hölder et la solution classique et mild pour que $f \in L^1((0, 1); X)$. Ainsi, on présentera l'existence, l'unicité et la régularité.

Finalement, on donne des applications sur des équations aux dérivées partielles.

Chapitre 3 Dans ce chapitre, on traite deux types des solutions pour une équation différentielle abstraite de type elliptique du second ordre avec des conditions non-local sur un espace de Banach. On donne ces résultats sans détails .

Chapitre 1

Notions fondamentales et préliminaires

Ce chapitre contient des rappels fondamentaux et outils nécessaires à ce travail .

1.1 Espace de Hölder

Dans cette section, on définit les espaces de Hölder et énoncer quelques propriétés importantes de ces espaces. On considère des fonctions qui possèdent même la caractérisation des fonctions lipschitziennes.

Soit Ω assez régulier.

On introduit des fonctions de classe $C^K(\Omega)$ pour tout $K \geq 0$. Soient $\gamma \in (0, +\infty)$ et $x_0 \in \Omega$, $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait la condition suivante

$$|u(x) - u(x_0)| = \frac{|u(x) - u(x_0)|}{|x - x_0|^\gamma} |x - x_0|^\gamma \leq \sup_{x \in \Omega, x \neq x_0} \left\{ \frac{|u(x) - u(x_0)|}{|x - x_0|^\gamma} \right\} |x - x_0|^\gamma, \quad \forall x \in \Omega$$

Définition 1.1. Soit $\gamma \in (0, 1]$. On dit que la fonction $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction hölderienne d'exposant γ s'il existe une constante $p_\gamma(u)(x_0)$ telle que

$$|u(x) - u(x_0)| < p_\gamma(u)(x_0) |x - x_0|^\gamma, \quad \forall x \in \Omega, \quad (1.1)$$

et

$$p_\gamma(u)(x_0) = \sup_{x \in \Omega, x \neq x_0} \left\{ \frac{|u(x) - u(x_0)|}{|x - x_0|^\gamma} \right\} < +\infty.$$

La constante $p_\gamma(u)(x_0)$ peut être dépendre de u , Ω , γ et x_0 .

D'après la formule (1.1) les fonctions de Hölder sont continues au point x_0 puisque pour tout

$\xi > 0$, on choisit $\delta = \left[\frac{\xi}{p_\gamma(u)(x_0)} \right]^{1/\gamma}$. Pour $\gamma = 1$, la fonction u est lipschitzienne en x_0 .

Définitions 1.2. • Si $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et bornée, on écrit

$$\|u\|_{C(\bar{U})} = \sup_{x \in U} |u(x)|.$$

- La semi norme de l'ensemble des fonctions γ -hölderiennes de $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} = \sup_{x,y \in U, x \neq y} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\}$$

et la norme de l'ensemble des fonctions γ -hölderiennes est

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} = \|u\|_{C(\bar{U})} + [u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})}. \quad (1.2)$$

Définition 1.3. L'espace de Hölder $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ est l'ensemble des fonctions $u \in C^K(\bar{U})$, $K \in \mathbb{N}$, $\gamma \in]0, 1]$ muni de la norme

$$\|u\|_{C^{K,\gamma}(\bar{U})} = \sum_{|\alpha| \leq K} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{U})} + \sum_{|\alpha|=K} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})}. \quad (1.3)$$

Théorème 1.1. L'espace $C^{K,\gamma}(\bar{U})$ est un espace de Banach pour la norme (1.3).

Remarque 1.1. Une fonction est dite localement hölderienne sur un intervalle J si pour tout $t \in J$ admet un voisinage dont lequel f est hölderienne.

Si J est compact et f est localement hölderienne sur J , alors elle est hölderienne.

1.2 Opérateurs linéaires fermés

Définition 1.4. Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire.

- 1) A est dit bornée si

$$D(A) = X \text{ et } \exists C > 0; \|Ax\| \leq C \|x\|$$

et on écrit $A \in L(X)$

- 2) A est dit fermé si et seulement si son graphe est fermé, i.e pour toute suite $(x_n)_n \in D(A)$ on a

$$\begin{cases} x_n \rightarrow x, \\ Ax_n \rightarrow y. \end{cases} \implies \begin{cases} x \in D(A), \\ Ax = y. \end{cases}$$

1.2.1 Graphe, ensemble résolvant, spectre et résolvante

Soient X un espace de Banach, $D(A)$ le domaine de l'opérateur linéaire A ; est $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$.

Définition 1.5. le graphe d'un opérateur linéaire A est le sous-espace de $X \times X$ qui donné par

$$G(A) = \{(x, Ax); x \in D(A)\} \subset X \times X.$$

Définition 1.6. • On appelle ensemble résolvant de A , qu'on note $\rho(A)$, l'ensemble

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - A : D(A) \longrightarrow X \text{ est bijectif et } (\lambda I - A)^{-1} : X \longrightarrow D(A) \text{ est borné}\}.$$

Si A est fermé, alors d'après le théorème du graphe fermé on a

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - A : D(A) \longrightarrow X \text{ est bijectif}\}.$$

- Le spectre de A est l'ensemble $\sigma(A) = \mathbb{C} / \rho(A)$.
- Pour $\lambda \in \rho(A)$, l'opérateur linéaire borné $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est appelé la résolvante de A au point λ .

1.3 L'intégrale de Dunford

1.3.1 Formule de Cauchy

Définition 1.7. Soit U un ouvert de \mathbb{C} . On note $H(U)$ (l'espace des fonctions holomorphes de U dans \mathbb{C}). Pour $f \in H(U)$, K un compact à bord de U et z_0 à l'intérieur de K , la formule de Cauchy est donnée par

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z_0} d\lambda,$$

où Γ est le bord positivement orienté de K .

1.3.2 Intégrale de Dunford-Riesz

Le calcul fonctionnel classique de Dunford-Riesz s'appuie sur la formule précédente pour construire $f(T)$ où T est un opérateur linéaire fermé et f est holomorphe. Plus précisément si $T \in L(X)$ et si f est holomorphe sur un voisinage ouvert U de $\sigma(T)$ (le spectre de T), alors on définit l'intégrale de Dunford-Riesz par

$$f(T) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda I - T)^{-1} d\lambda,$$

où Γ est le bord positivement orienté d'un compact à bord K contenant $\sigma(T)$ et contenu dans U .

Propriété de l'intégrale de Dunford

Théorème 1.2. Soient $f, g \in H(T)$ et $T \in L(X)$, alors $f \cdot g \in H(T)$ et

$$f(T)g(T) = (f \cdot g)(T) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} f(\lambda)g(\lambda)(\lambda I - T)^{-1} d\lambda.$$

1.4 Semi-groupe analytique

Cette section est consacrée, d'avoir les semi-groupes analytique d'abord on savoir qu'est un semi-groupe puis on présentera les C_0 semi-groupes et leur générateur infinitésimal. Ceci nécessaire puisqu'un semi-groupe analytique est un C_0 semi-groupe qui possède des propriétés supplémentaires.

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach complexe. Dans cette section, on considère $(T(t))_{t \geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés définis sur X .

Définitions 1.8. • La famille $(T(t))_{t \geq 0}$ est appelée semi-groupe si on a

- 1) $T(0) = I$.
- 2) $\forall s, t \in \mathbb{R}^+, T(s+t) = T(s)T(t)$.

- Un semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X est dit uniformément continue sur X si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0, \quad (1.4)$$

(cette propriété est appelée la forte continuité en zéro).

- Le semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est dit fortement continu si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x.$$

Un semi-groupe fortement continu est noté C_0 semi-groupe.

Corollaire 1.1. Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0 semi-groupe. Alors, pour tout $x \in X$, $t \mapsto T(t)x$ est une fonction continue de \mathbb{R}^+ dans X , i.e pour tout $t_0 \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \|T(t)x - T(t_0)x\| = 0.$$

1.4.1 Générateur infinitésimal

A un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ on associe un opérateur appelé le générateur infinitésimal. Celui-ci peut être obtenue comme la dérivée à droite en 0 de la fonction $t \mapsto T(t)x$, pour tout $x \in X$ est continue, mais ne sont pas nécessairement différentiables. On doit alors se restreindre, pour cette section, aux éléments de X pour lesquels la dérivée voulue existe. Ainsi, on obtient le générateur infinitésimal qui n'est pas défini partout.

Définition 1.9. Le générateur infinitésimal du C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est l'opérateur A défini par

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} \text{ existe dans } X \right\}, \\ Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h}, \quad x \in D(A). \end{cases}$$

$D(A)$ est non vide ($0 \in D(A)$) et est un sous-espace vectoriel de X . A est linéaire de $D(A)$ dans X .

Proposition 1.1. Soit A , de domaine $D(A)$ le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t \geq 0}$, C_0 semi-groupe. Alors, on a les propriétés suivantes

$$\boxed{1} \quad \forall t \geq 0, \forall x \in X, \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x.$$

$$\boxed{2} \quad \forall t \geq 0, \forall x \in X, \int_0^t T(s)x ds \in D(A), \quad A \int_0^t T(s)x ds = T(t)x - x.$$

$$\boxed{3} \quad \forall t \geq 0, \forall x \in D(A), T(t)x \in D(A) \text{ et } t \mapsto T(t)x \text{ est différentiable sur } \mathbb{R}^+, \text{ avec}$$

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

$$\boxed{4} \quad \forall s, t \geq 0, \forall x \in D(A), T(t)x - T(s)x = \int_s^t AT(\tau)x d\tau = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau.$$

Corollaire 1.2. *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$. Alors, $D(A)$ est dense dans X et A est un opérateur linéaire fermé.*

Lemme 1.1. *Soit $f : [a, b] \rightarrow X$ une fonction continue, alors*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s) ds = f(a). \quad (1.5)$$

Théorème 1.3. *Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe sur X si et seulement si A est un opérateur linéaire borné sur X .*

Démonstration.

$\boxed{1} \iff$ Soit A un opérateur linéaire borné sur X . Posons pour tout $t \geq 0$

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

On a $T(0) = I$ et par un calcul simple, on a pour tous $t, s \geq 0$

$$\begin{aligned} T(t+s) &= e^{(t+s)A} \\ &= e^{tA} e^{sA} \\ &= T(t)T(s). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t \geq 0$ on a

$$\begin{aligned} \|T(t) - I\| &= \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - I \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} t^n \frac{\|A^n\|}{n!} \\ &= e^{t\|A\|} - 1 \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0.$$

D'autre part, pour tout $t > 0$ on a

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| &= \left\| \frac{e^{tA} - I}{t} - A \right\| \\
&= \left\| \frac{e^{tA} - I - tA}{t} \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \\
&\leq \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{+\infty} t^n \frac{\|A^n\|}{n!} \\
&= \frac{1}{t} (e^{t\|A\|} - 1 - t\|A\|) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t) - I}{t} = A.$$

Ainsi, $(T(t))_{t \geq 0}$ est un C_0 semi-groupe d'opérateurs linéaire bornés sur X de générateur infinitésimal A .

[2] \Leftarrow) Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0 semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X et de générateur infinitésimal A . On a

$$T(t) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow B(X),$$

$$t \longmapsto T(t) \text{ est continue.}$$

Donc

$$\int_0^t T(s) ds \in B(X), \quad \forall t \geq 0.$$

D'après le lemme 1.1, on a $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s) ds = T(0) = I$.

Il existe alors $\rho > 0$ tel que

$$\left\| \frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(s) ds - I \right\| < 1$$

ce qui implique

$$\frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(s) ds \text{ est inversible}$$

et donc

$$\int_0^\rho T(s) ds \text{ est aussi inversible.}$$

Alors, pour tout $h > 0$ on a

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} \int_0^\rho T(s) ds &= \frac{1}{h} \int_0^\rho (T(h+s) - T(s)) ds \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_h^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^\rho T(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_\rho^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^h T(s) ds \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{T(h) - I}{h} = \left(\frac{1}{h} \int_\rho^{\rho+h} T(s) ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s) ds \right) \left(\int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1}$$

compte tenu du lemme 1.1, on obtient

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} = (T(\rho) - I) \left(\int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1}.$$

Ainsi, le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est l'opérateur linéaire borné

$$A = (T(\rho) - I) \left(\int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1}.$$

■

Proposition 1.2. Soient $(T(t))_{t \geq 0}$ et $(S(t))_{t \geq 0}$ deux C_0 semi-groupes de générateurs infinitésimaux respectifs A et B . Si $A = B$, alors pour $t \geq 0$, $T(t) = S(t)$.

Proposition 1.3. Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$. Alors

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{+\infty} D(A^n)} = X.$$

Remarque 1.2. Soit A un opérateur linéaire borné sur X . Alors

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n,$$

existe et détermine d'une manière unique un semi-groupe uniformément continu $(e^{tA})_{t \geq 0}$ dont A est le générateur infinitésimal. Réciproquement, $(T(t))_{t \geq 0}$ étant un semi-groupe uniformément continu, pour tout $x \in X$, $\frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds$ converge uniformément vers $T(0)x = x$ quand $t \rightarrow 0^+$.

Donc, pour tout $t > 0$, $\frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds$ est inversible et pour tout $y \in X$, il existe $x \in X$ et $t > 0$ tel que

$$y = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds,$$

donc $y \in D(A)$. Ainsi, $D(A) = X$ et A est borné.

1.4.2 Théorème de Hille-Yosida

Dans la majorité des cas, l'opérateur A est un opérateur différentiel non borné, mais il souvent fermé à domaine dense. C'est pour cela on utilise le théorème de Hille-Yosida pour voir qu'un opérateur A soit le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contractions.

Proposition 1.4. *Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0 semi-groupe. Alors, il existe des constantes réelles $w \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$ telles que*

$$\forall t \geq 0, \|T(t)\|_{L(X)} \leq Me^{wt}.$$

Remarque 1.3. *Si $w = 0$ et $M = 1$, $T(t)_{t \geq 0}$ est appelé C_0 semi-groupe de contractions.*

Théorème 1.4. *Un opérateur linéaire A , de domaine $D(A)$, est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contractions $(T(t))_{t \geq 0}$ sur X si et seulement si*

$$\boxed{1} \quad A \text{ est fermé et } \overline{D(A)} = X.$$

$$\boxed{2} \quad \mathbb{R}^+ \subset \rho(A) \text{ et pour tout } \lambda > 0, \text{ on a}$$

$$\|R_\lambda(A)\|_{L(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Corollaire 1.3. *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contractions sur X , $(T(t))_{t \geq 0}$. Alors*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) > 0\} \subset \rho(A)$$

et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$

$$\|R_\lambda(A)\|_{L(X)} \leq \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda)}.$$

Corollaire 1.4. *Un opérateur linéaire A , de domaine $D(A)$, est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ sur X tel que $\|T(t)\|_{L(X)} \leq e^{wt}$ si et seulement si*

$$\boxed{1} \quad A \text{ est fermé et } \overline{D(A)} = X.$$

$$\boxed{2} \quad]w, +\infty[\subset \rho(A) \text{ et pour tout } \lambda \in]w, +\infty[, \text{ on a}$$

$$\|R_\lambda(A)\|_{L(X)} \leq \frac{1}{\lambda - w}.$$

On donne un théorème analogue pour un C_0 semi-groupe quelconque.

Théorème 1.5. *Un opérateur linéaire A , de domaine $D(A)$, est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ sur X tel que $\|T(t)\|_{L(X)} \leq Me^{wt}$ si et seulement si*

$$\boxed{1} \quad A \text{ est fermé et } \overline{D(A)} = X.$$

$$\boxed{2} \quad]w, +\infty[\subset \rho(A) \text{ et pour tout } \lambda \in]w, +\infty[, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \text{ on a}$$

$$\|(R_\lambda(A))^{-n}\|_{L(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}.$$

Semi-groupes analytiques

Après avoir étudié les C_0 semi-groupes il est nécessaire d'aborder les semi-groupes analytiques. C'est un outil très puissant pour la résolution de certaines équations aux dérivées partielles. (Pour plus de détails voir [8])

Dans cette section, on définit pour tout $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, le secteur

$$\sum_{\alpha} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; |arg z| < \alpha\}.$$

Définition 1.10. Une famille $(T(z))_{z \in \sum_{\alpha}}$ d'éléments de $L(X)$ forme un **semi-groupe analytique** de type α dans X si elle vérifie les conditions suivantes

$$\boxed{1} \quad T(0) = I.$$

$$\boxed{2} \quad \forall z_1, z_2 \in \sum_{\alpha} \text{ tels que } z_1 + z_2 \in \sum_{\alpha}, \quad T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2).$$

$$\boxed{3} \quad \forall \epsilon > 0, \forall x \in X, \quad \lim_{z \rightarrow 0, z \in \sum_{\alpha-\epsilon}} T(z)x = x.$$

$$\boxed{4} \quad \text{l'application } z \mapsto T(z) \text{ est holomorphe sur } \sum_{\alpha}.$$

Si de plus,

$$(a) \quad \forall \epsilon > 0, \quad \sup_{z \in \sum_{\alpha-\epsilon}} \|T(z)\| < \infty, \quad (\text{i.e. } (T(z))_{z \in \sum_{\alpha-\epsilon}} \text{ est uniformément borné dans } \sum_{\alpha-\epsilon})$$

alors

$$(T(z))_{z \in \sum_{\alpha}} \text{ est appelé semi-groupe analytique de type } \alpha \text{ dans } X.$$

Théorème 1.6. Soient A un opérateur linéaire fermé à domaine dense $D(A)$ dans X et $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\alpha+\pi/2} \subset \rho(A), \\ \exists M > 0, \forall \lambda \in \rho(A), \| (A - \lambda I)^{-1} \|_{L(X)} \leq \frac{M}{|\lambda|}. \end{array} \right. \quad (1.6)$$

On définit la famille d'opérateurs linéaires $(T(t))_{t \geq 0}$, notée $(e^{tA})_{t \geq 0}$ par

$$\left\{ \begin{array}{l} T(0) = I, \\ \forall t > 0, \forall x \in X, \quad T(t)x = e^{tA}x = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (A - \lambda I)^{-1} x d\lambda, \end{array} \right.$$

où $\Gamma \subset \rho(A)$ est un contour non borné dans $\sum_{\alpha+\pi/2}$ allant de $+\infty e^{-i(\pi/2+\alpha)}$ à $+\infty e^{i(\pi/2+\alpha)}$.

Alors, $(e^{tA})_{t \geq 0}$ est un C_0 semi-groupe de générateur infinitésimal A .

De plus, le C_0 semi-groupe $(e^{tA})_{t \geq 0}$ se prolonge analytiquement en un semi-groupe analytique de type α noté $(e^{zA})_{z \in \sum_{\alpha}}$.

Remarque 1.4. Si A est un opérateur linéaire fermé à domaine $D(A)$ dans X vérifiant 1.6, alors $-A \in \sum_{\alpha+\pi/2}$, $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Proposition 1.5. Soient $A \in L(X)$ et $C \subset \mathbb{C}$ un cercle de centre 0 et de rayon $r > \|A\|$, alors

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{t\lambda} R(\lambda, A) d\lambda, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Soit $w \in \mathbb{R}$.

1.5 Opérateur sectoriel

Il est important de préciser qu'il existe de nombreuses définitions équivalentes pour les opérateurs sectoriels.

Définition 1.11. On dit qu'un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ est sectoriel s'ils existes des constantes $w, \theta \in (\pi/2, \pi)$ et $M > 0$ telle que

$$\begin{cases} \rho(A) \supset S_{\theta, w} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq w, |\arg(\lambda - w)| < \theta\}, \\ \|R(\lambda, A)\|_{L(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - w|}, \quad \lambda \in S_{\theta, w}. \end{cases} \quad (1.8)$$

On note que tous les opérateurs sectoriels sont fermé puisque l'ensemble résolvant n'est pas vide. Pour tous $t > 0$, la condition (1.8) est utilisé pour définir un opérateur linéaire borné e^{tA} .

Exemple 1.1. On a comme exemple l'opérateur de Laplace Δ

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N D_{ii} u$$

si $N \geq 1$ on a $\Delta u = u''$.

Théorème 1.7. Soient A un opérateur sectoriel, e^{tA} est donné par 1.7. Alors, les affirmations suivantes sont vraies.

[1] $e^{tA} x \in D(A^k)$ pour tout $t > 0$, $x \in X$, $k \in \mathbb{N}$. Si $x \in D(A^k)$, alors

$$A^k e^{tA} x = e^{tA} A^k x, \quad t \geq 0.$$

[2] $e^{tA} e^{sA} = e^{(t+s)A}$ pour chaque $t, s \geq 0$.

[3] Il existe des constantes M_i , avec $i = \{0, 1, 2, \dots, k\}$ telle que

$$\begin{cases} \|e^{tA}\|_{L(X)} \leq M_0 e^{wt}, & t > 0, \\ \|t^k (A - wI)^k e^{tA}\|_{L(X)} \leq M_k e^{wt}, & t > 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

En particulier, de 1.9 la deuxième estimation il s'ensuit que pour tout $\epsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ il existe $C_{k,\epsilon} > 0$ telle que

$$\|t^k A^k e^{tA}\|_{L(X)} \leq C_{k,\epsilon} e^{(w+\epsilon)t}, \quad t > 0. \quad (1.10)$$

[4] La fonction $t \mapsto e^{tA}$ de classe $C^\infty((0, +\infty); L(X))$ on a pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{d^k}{dt^k} e^{tA} = A^k e^{tA}, \quad t > 0, \text{ est vraie.} \quad (1.11)$$

De plus, il est analytique e^{zA} sur le secteur $S_{\theta-\pi/2,0}$ et pour

$$z = \rho e^{i\alpha} \in S_{\theta-\pi/2,0}, \quad \theta' \in (\pi/2, \theta - \alpha),$$

l'égalité

$$e^{zA} = \frac{1}{2\pi i} \int e^{\lambda s} R(\lambda, A) d\lambda, \quad \text{est satisfaite.}$$

Preuve. Voir [4].

■

Proposition 1.6. les affirmations suivantes sont satisfaites

[1] Si $x \in \overline{D(A)}$, alors $\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{tA} x = x$. Réciproquement, si $y = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{tA} x$ existe, alors $x \in \overline{D(A)}$ et $y = x$.

[2] $\forall x \in X$ et $t \geq 0$, l'intégrale $\int_0^t e^{sA} x ds$ appartenant à $D(A)$ et

$$A \int_0^t e^{sA} x ds = e^{tA} x - x. \quad (1.12)$$

Si, de plus, la fonction $s \mapsto A e^{sA} x$ est intégrable dans $(0, \epsilon)$ pour petit $\epsilon > 0$, alors

$$e^{tA} x - x = \int_0^t A e^{sA} x ds, \quad t \geq 0.$$

[3] Si $x \in D(A)$ et $Ax \in \overline{D(A)}$, alors $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{tA} x - x}{t} = Ax$. Réciproquement, si

$$z = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{tA} x - x}{t} \text{ existe,}$$

alors $x \in D(A)$ et $Ax = z \in \overline{D(A)}$.

[4] Si $x \in D(A)$ et $Ax \in \overline{D(A)}$, alors $\lim_{t \rightarrow 0^+} A e^{tA} x = Ax$.

Preuve. Voir [4].

■

1.6 L'espace d'interpolation

Soient $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur sectoriel et l'ensemble

$$M_0 = \sup_{0 < t \leq 1} \|e^{tA}\|, \quad M_1 = \sup_{0 < t \leq 1} \|tAe^{tA}\|. \quad (1.13)$$

Pour tout $x \in \overline{D(A)}$ la fonction $t \mapsto u(t) = e^{tA}x$ appartient à $C([0, T]; X)$ et pour tout $x \in D(A)$ tel que $Ax \in \overline{D(A)}$, il appartient à $C^1([0, T]; X)$. (la proposition 1.6)
Donc, on pose la question

1 Comment pouvons-nous caractériser la classe des données initiales telles que $u(t) = e^{tA}x$ a une régularité intermédiaire, par exemple, il est hölderienne d'exposant γ pour certains $0 < \gamma < 1$?

Pour résoudre la question, on introduit quelque espace de Banach entre X et $D(A)$.

1.6.1 Espace de Moyenne

Soit X un espace de Banach complexe .

Définition 1.12. On définit pour $p \in [1, +\infty[$

$$L_*^p(\mathbb{R}^+; X) = \left\{ f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow X \text{ fortement mesurable, } \int_0^{+\infty} \|f(t)\|^p \frac{dt}{t} < \infty \right\},$$

et pour $p = +\infty$

$$L_*^p(\mathbb{R}^+; X) = \left\{ f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow X \text{ fortement mesurable, } \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \text{ess} \|f(t)\| < \infty \right\}.$$

Proposition 1.7. Soit $p \in [1, +\infty]$. Alors, $L_*^p(\mathbb{R}^+; X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_{L_*^p(\mathbb{R}^+; X)} = \begin{cases} \left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } p \in [1, +\infty[, \\ \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \text{ess} \|f(t)\| & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

Définition 1.13. Soient $(X_0, \|\cdot\|_{X_0})$ et $(X_1, \|\cdot\|_{X_1})$ deux espaces de Banach s'injectant continuellement dans un même espace vectoriel topologique séparé ξ . Soient $p \in [1, +\infty]$ et $\theta \in]0, 1[$. On appelle espace de moyenne (ou espace d'interpolation) entre X_0 et X_1 , l'espace $(X_0, X_1)_{\theta, p}$ défini par

$$\xi \in (X_0, X_1)_{\theta, p} \iff \begin{cases} \forall t > 0, \exists u_0(t) \in X_0, \exists u_1(t) \in X_1 : \xi = u_0(t) + u_1(t), \\ t^{-\theta} u_0(t) \in L_*^p(\mathbb{R}^+; X_0), \quad t^{1-\theta} u_1(t) \in L_*^p(\mathbb{R}^+; X_1). \end{cases}$$

Proposition 1.8. Soient $p \in [1, +\infty]$ et $\theta \in]0, 1[$.
Alors

$$(X_0, X_1)_{\theta, p} = (X_1, X_0)_{1-\theta, p}.$$

Pour la définition suivant $X_0 = D(A)$ et $X_1 = X$.

Définition 1.14. Soient $p \in [1, +\infty]$ et $\theta \in]0, 1[$ et A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset X$ muni de la norme du graphe. Alors, on définit

$$D_A(\theta, p) = (X, D(A))_{\theta, p}$$

Définition 1.15. Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur sectoriel et $0 < \gamma < 1$ fixé, on a l'ensemble

$$\left\{ \begin{array}{l} D_A(\gamma, \infty) = \left\{ x \in X; [x]_\gamma = \sup_{0 < t \leq 1} \|t^{\gamma-1} A e^{tA} x\| < +\infty \right\}, \\ \|x\|_{D_A(\gamma, \infty)} = \|x\| + [x]_\gamma. \end{array} \right. \quad (1.14)$$

On note que, la caractérisation de $D_A(\gamma, \infty)$ est comportement de $\|t^{1-\gamma} A e^{tA} x\|$ voisin $t = 0$.
En effet, pour $0 < a < b < +\infty$ et pour chaque $x \in X$ l'estimation de (1.9), avec $k = 1$ implique que

$$\sup_{a < t \leq b} \|t^{\gamma-1} A e^{tA} x\| \leq C \|x\|, \text{ avec } C = C(a, b, \gamma).$$

à cet effet, l'intervalle $(0, 1]$ dans la définition de $D_A(\gamma, \infty)$ peut être remplacé par chaque $[0, T]$, avec $T > 0$ et pour tout $T > 0$ la norme $x \mapsto \|x\| + \sup_{0 < t \leq T} \|t^{\gamma-1} A e^{tA} x\|$ est équivalent à la norme dans (1.14). Pour $k = 2$ et pour tout $x \in D_A(\gamma, \infty)$ on obtient

$$\sup_{0 < t \leq T} \|t^{2-\gamma} A^2 e^{tA} x\| \leq \sup_{0 < t \leq T} \|t A e^{t/2A}\|_{L(X)} \|t^{1-\gamma} A e^{t/2A} x\| \leq C \|x\|_{D_A(\gamma, \infty)}.$$

Si $x \in D_A(\gamma, \infty)$ et $T > 0$, alors la fonction $s \mapsto \|A e^{sA} x\|$ appartient à $L^1(0, T)$ par la proposition 1.6 (2) implique que

$$e^{tA} x - x = \int_0^t A e^{sA} x ds, \quad t \geq 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} e^{tA} x = x.$$

En particulier

$$D(A) \subset D_A(\gamma, \infty) \subset D_A(\beta, \infty) \subset \overline{D(A)}, \quad 0 < \beta < \gamma < 1.$$

Chapitre 2

Problème de Cauchy abstrait

Dans ce chapitre, nous allons voir que l'on peut donner plus d'informations sur ce sujet pour certaines solutions du problème de Cauchy abstrait.

Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur sectoriel et $T > 0$. On étudie le problème de Cauchy non-homogène

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), & 0 < t \leq T, \\ u(0) = x, \end{cases} \quad (2.1)$$

où $f \in C([0, T]; X)$ (“ $f : [0, T] \longrightarrow X$ continue”). On introduit les deux domaines suivants

$$\begin{cases} D^1 = \{u \in C^1([0, T]; X) \cap C([0, T]; D(A))\}, \\ D^2 = \{u \in C^1((0, T]; X) \cap C((0, T]; D(A)) \cap C([0, T]; X)\}. \end{cases}$$

Alors on définit la solution du problème (2.1) comme suit :

2.1 Solution stricte et classique

Définition 2.1. Soit $f : [0, T] \longrightarrow X$ une fonction continue et $x \in X$. Alors

1 On dit que u est une solution stricte de (2.1) si $u \in D^1$ vérifiant

$$u'(t) = Au(t) + f(t), \quad \forall t \in [0, t], \quad u(0) = x.$$

2 On dit que u est une solution classique de (2.1) si $u \in D^2$ vérifiant

$$u'(t) = Au(t) + f(t), \quad \forall t \in (0, t], \quad u(0) = x.$$

Remarque 2.1. Grâce à la définition 2.1 on remarque que si le problème (2.1) admet une solution stricte, alors

$$x \in D(A), \quad Ax + f(0) = u'(0) \in \overline{D(A)}$$

et si le problème (2.1) admet une solution classique, alors

$$x \in \overline{D(A)}.$$

2.2 Solution mild

Définition 2.2. On définit la solution de problème (2.1) par la formule suivante

$$u(t) = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds. \quad (2.2)$$

Si l'intégrale dans la formule (2.2) est bien défini, alors la fonction u qui est définie par (2.2) est appelée solution mild pour le problème (2.1).

Lemme 2.1. Soient $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ est un opérateur fermé et I un intervalle réel avec $\inf I = a$, $\sup I = b$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) et $f : I \rightarrow D(A)$ telle que $t \rightarrow f(t)$, $t \rightarrow Af(t)$ sont intégrable dans I . Ce que implique

$$\int_a^b f(t)dt \in D(A), \quad A \int_a^b f(t)dt = \int_a^b Af(t)dt.$$

Preuve. Voir [4]. ■

Proposition 2.1. Soit $f \in C((0, T]; X)$ telle que $t \mapsto \|f(t)\| \in L^1(0, T)$ et soit $x \in \overline{D(A)}$. Si u est une solution classique de problème (2.1), alors elle est donnée par la formule (2.2).

Preuve. Soit u une solution classique.

Ce signifie que $u \in C^1((0, T]; X) \cap C((0, T]; D(A)) \cap C([0, T]; X)$ et soit la fonction $v \in C([0, t]; X) \cap C^1((0, t); X)$ qui définie par

$$v(s) = e^{(t-s)A}u(s), \quad 0 \leq s \leq t$$

$$\text{et } v(0) = e^{tA}u(0)$$

$$v(0) = e^{tA}x, \quad v(t) = u(t)$$

$$v'(s) = -Ae^{(t-s)A}u(s) + e^{(t-s)A}u'(s)$$

$$v'(s) = -Ae^{(t-s)A}u(s) + e^{(t-s)A}(Au(s) + f(s))$$

$$v'(s) = e^{(t-s)A}f(s), \quad 0 < s < t.$$

En effet, pour $0 < 2\epsilon < t$, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\epsilon}^{t-\epsilon} v'(s)ds = v(s) \Big|_{\epsilon}^{t-\epsilon} \\ & \int_{\epsilon}^{t-\epsilon} v'(s)ds = v(t-\epsilon) - v(\epsilon) \\ \implies & \int_{\epsilon}^{t-\epsilon} e^{(t-s)A}f(s)ds = v(t-\epsilon) - v(\epsilon). \end{aligned}$$

On fait tendre ϵ vers 0^+ , on obtient

$$\begin{aligned} v(t) - v(0) &= \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds \\ \implies v(t) &= \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds + e^{tA} x. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.2. Soient $f \in C_b((0, T); X)$ et $x \in X$. Si u est définie par (2.2), donc pour tout $t \in [0, T]$, l'intégrale $\int_0^t u(s) ds$ appartenant à $D(A)$ et

$$u(t) = x + A \int_0^t u(s) ds + \int_0^t f(s) ds, \quad 0 \leq s \leq t. \quad (2.3)$$

Preuve. Pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^t u(s) ds &= \int_0^t e^{sA} x ds + \int_0^t ds \int_0^s e^{(s-\sigma)A} f(\sigma) d\sigma \\ &= \int_0^t e^{sA} x ds + \int_0^t d\sigma \int_\sigma^t e^{(s-\sigma)A} f(\sigma) ds, \quad 0 \leq \sigma \leq s \leq t. \end{aligned}$$

On pose $\tau = s - \sigma$,

$$\begin{cases} \text{si } s = \sigma \Rightarrow \tau = 0 \text{ et } d\tau = ds, \\ \text{si } s = t \Rightarrow \tau = t - \sigma. \end{cases}$$

Alors

$$\int_\sigma^t e^{(s-\sigma)A} f(\sigma) ds = \int_0^{t-\sigma} e^{\tau A} f(\sigma) d\tau.$$

D'après l'assertion 2 de la proposition 1.6 $\int_0^{t-\sigma} e^{\tau A} f(\sigma) d\tau$ appartenant à $D(A)$ et

$$\begin{aligned} A \int_\sigma^t e^{(s-\sigma)A} f(\sigma) ds &= \int_\sigma^t A e^{(s-\sigma)A} f(\sigma) ds \\ &= [e^{(s-\sigma)A} f(\sigma)]_\sigma^t \\ &= e^{(t-\sigma)A} f(\sigma) - I f(\sigma) \\ &= (e^{(t-\sigma)A} - I) f(\sigma) \\ &= (e^{(s-\sigma)A} - I) f(\sigma). \end{aligned}$$

D'autre part, d'après le lemme (2.1); on a

$$\int_0^t d\sigma \int_\sigma^t e^{(s-\sigma)A} f(\sigma) ds \in D(A).$$

D'après l'assertion 2 de la proposition 1.6 , l'intégrale $\int_0^t u(s)ds \in D(A)$ et

$$\begin{aligned} A \int_0^t u(s)ds &= A \left[\int_0^t e^{sA} x ds + \int_0^t d\sigma \int_\sigma^t e^{(s-\sigma)A} f(\sigma) ds \right] \\ &= e^{tA} x - x + \int_0^t (e^{(t-\sigma)A} - I) f(\sigma) d\sigma, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

On compose l'opérateur A à l'intégrale $\int_0^t u(s)ds$ et on utilise l'assertion 2 de la proposition 1.6 on obtient

$$\begin{aligned} A \int_0^t u(s)ds &= e^{tA} x - x + \int_0^t (e^{(t-\sigma)A} - I) f(\sigma) d\sigma \\ &= u(t) - x - \int_0^t f(s) ds, \end{aligned}$$

$$\text{car } u(t) = e^{tA} x + \int_0^t e^{t-\sigma} f(\sigma) d\sigma$$

$$\implies u(t) = A \int_0^t u(s)ds + x + \int_0^t f(s)ds. \quad \blacksquare$$

Dans la proposition suivante, on présente que la solution mild est dans $C^\gamma([0, T]; X)$ pour $x = 0$. Pour cela, on définit

$$M_k = \sup_{0 < t \leq T+1} \|t^k A^k e^{tA}\|, \quad k = 0, 1, 2 \quad (2.4)$$

$$\text{et } v(t) = (e^{tA} * f)(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.5)$$

Proposition 2.3. Soit $f \in C_b((0, T); X)$, alors la fonction v appartenant à $C^\gamma([0, T]; X)$ pour $\gamma \in (0, 1)$ et il existe $C = C(\gamma, T)$ telle que

$$\|v\|_{C^\gamma([0, T]; X)} \leq C \sup_{0 < s < T} \|f(s)\|. \quad (2.6)$$

Preuve. Pour $0 \leq t \leq T$, on a

$$\begin{aligned} \|v(t)\| &= \left\| \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|e^{(t-s)A} f(s)\| ds \\ &\leq \int_0^t \sup \|e^{(t-s)A} f(s)\| ds \\ &\leq \sup_{0 < t \leq T+1} \|e^{tA}\| \|f\|_\infty t \\ &\leq M_0 t \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Considérant que, pour $0 \leq s \leq t \leq T$, on a

$$\begin{aligned} v(t) - v(s) &= \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds - \int_0^s e^{(s-\sigma)A} f(\sigma) d\sigma \\ &= \int_0^s e^{(t-\sigma)A} f(\sigma) d\sigma + \int_s^t e^{(s-\sigma)A} f(\sigma) d\sigma - \int_0^s e^{(s-\sigma)A} f(\sigma) d\sigma \\ &= \int_0^s (e^{(t-\sigma)A} - e^{(s-\sigma)A}) f(\sigma) d\sigma + \int_s^t e^{(s-\sigma)A} f(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

posons

$$\begin{aligned} g(t) &= (e^{(t-\sigma)A} - e^{(s-\sigma)A}) f(\sigma) \\ g'(t) &= A e^{(t-\sigma)A} f(\sigma) \end{aligned}$$

et on fait le changement de variable $\tau = t - \sigma$

$$\begin{cases} \text{si } t \rightarrow s \Rightarrow \tau = s - \sigma, & d\tau = dt \\ \text{si } t \rightarrow T \Rightarrow \tau = T - \sigma \end{cases}$$

$$\Rightarrow v(t) - v(s) = \int_0^s d\sigma \int_{s-\sigma}^{t-\sigma} A e^{\tau A} f(\sigma) d\tau + \int_s^t e^{(s-\sigma)A} f(\sigma) d\sigma.$$

Finalement

$$\begin{aligned} \|v(t) - v(s)\| &\leq M_1 \|f\|_\infty \int_0^s d\sigma \int_{s-\sigma}^{t-\sigma} \frac{d\tau}{\tau} + M_0 \|f\|_\infty (t - s) \\ &\leq M_1 \|f\|_\infty \int_0^s \frac{d\sigma}{(s - \sigma)^\gamma} \int_{s-\sigma}^{t-\sigma} \frac{1}{\tau^{1-\gamma}} d\tau + M_0 \|f\|_\infty (t - s) \\ &\leq M_1 \|f\|_\infty \int_0^s \frac{d\sigma}{(s - \sigma)^\gamma} \int_0^{t-s} \frac{1}{\tau^{1-\gamma}} d\tau + M_0 \|f\|_\infty (t - s) \\ &\leq \left(\frac{M_1 T^{1-\gamma}}{\gamma(1-\gamma)} (t - s)^\gamma + M_0 (t - s) \right) \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

■

2.3 Comparaison entre la solution stricte, classique et mild

Lemme 2.2. Soient $f \in C_b((0, T]; X)$, $x \in \overline{D(A)}$ et u la solution mild de problème (2.1). Alors, les conditions suivantes sont équivalentes

1 $u \in C((0, T]; D(A))$.

2 $u \in C^1((0, T]; X)$.

3 u est une solution classique de problème (2.1).

Si de plus ; $f \in C([0, T]; X)$, les conditions suivantes sont équivalentes

a $u \in C([0, T]; D(A))$.

b $u \in C^1([0, T]; X)$.

c u est une solution stricte de problème (2.1).

Démonstration. On montre que $1 \Leftrightarrow 3$ et $2 \Leftrightarrow 3$. Il est clair que la condition 3 implique les deux conditions 1 et 2, donc reste à voir l'implication inverse.

• $1 \Rightarrow 3$

on a $u \in C([0, T]; X)$ et satisfait 2.3, alors pour tout t et $t+h \in (0, T]$

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h} = \frac{1}{h} A \int_t^{t+h} u(s) ds + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s) ds. \quad (2.7)$$

et si f est continue au point t , alors

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s) ds = f(t). \quad (2.8)$$

Par passage à la limite

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right) &= u'(t) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{h} A \int_t^{t+h} u(s) ds + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s) ds \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{h} \int_t^{t+h} Au(s) ds + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s) ds \right] \end{aligned}$$

Comme Au et f sont continues dans $(0, T]$, alors

$$= Au(t) + f(t).$$

Pour l'équation (2.7) et (2.8) on obtient que u est différentiable au point t .

Donc, $u'(t)$ est continue dans $(0, T]$. Par conséquent, u est une solution classique.

• $2 \Rightarrow 3$

On suppose que u est continue sur $(0, T]$, alors

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(s) ds \right] = u(t).$$

D'autre part, l'équation (2.7) et (2.8) implique que la limite existe

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} A \left(\frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(s) ds \right) = u'(t) - f(t)$$

Comme A est un opérateur fermé, alors $u(t)$ appartient à $D(A)$ et $Au(t) = u'(t) - f(t)$. Puisque u' et f sont continues dans $(0, T]$, donc Au est aussi continue dans $(0, T]$. En conséquence que u est une solution classique.

Similairement, on montre les équivalences des conditions $a) \Leftrightarrow b)$ et $b) \Leftrightarrow c)$. ■

Théorème 2.1. Soient $f \in C^\gamma([0, T]; X)$, $x \in X$ et u la fonction qui définie dans (2.2). Alors, $u \in C^\gamma([\epsilon, T]; D(A)) \cap C^{1+\gamma}([\epsilon, T]; X)$ pour tout $\epsilon \in (0, T)$. De plus, les affirmations suivantes sont satisfaites

- 1** Si $x \in \overline{D(A)}$, alors u est une solution classique de problème (2.1).
- 2** Si $x \in D(A)$ et $Ax + f(0) \in \overline{D(A)}$, alors u est une solution stricte de problème (2.1) et il existe $C > 0$ tel que

$$\|u\|_{C^1([0, T]; X)} + \|u\|_{C([0, T]; D(A))} \leq C \left(\|f\|_{C^\gamma([0, T]; X)} + \|x\|_{D(A)} \right). \quad (2.9)$$

- 3** Si $x \in D(A)$ et $Ax + f(0) \in D_A(\gamma, \infty)$, alors u' et Au sont dans $C^\gamma([0, T]; X)$. De plus, u' appartient à $B([0, T]; D_A(\gamma, \infty))$ et il existe C tel que

$$\begin{aligned} & \|u\|_{C^{1+\gamma}([0, T]; X)} + \|Au\|_{C^\gamma([0, T]; X)} + \|u'\|_{B([0, T]; D_A(\gamma, \infty))} \\ & \leq C \left(\|f\|_{C^\gamma([0, T]; X)} + \|x\|_{D(A)} + \|Ax + f(0)\|_{D_A(\gamma, \infty)} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Démonstration. On a pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds \\ &= e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds + \int_0^t e^{(t-s)A} f(t) ds - \int_0^t e^{(t-s)A} f(t) ds \\ &= \int_0^t e^{(t-s)A} (f(s) - f(t)) ds + e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A} f(t) ds \\ &= u_1(t) + u_2(t), \end{aligned} \quad (2.11)$$

telle que

$$\begin{cases} u_1(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} (f(s) - f(t)) ds, \\ u_2(t) = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A} f(t) ds. \end{cases}$$

On note que $u_1(t), u_2(t) \in D(A)$ pour $t > 0$. On utilise le lemme 2.2 pour montrer que si

$x \in \overline{D(A)}$, alors $u \in C((0, T]; D(A))$ et si $x \in D(A)$ et $Ax + f(0) \in \overline{D(A)}$, alors $u \in C([0, T]; D(A))$.

Concernant le terme $u_1(t)$, l'estimation

$$\|Ae^{(t-s)A}(f(s) - f(t))\| \leq \frac{M_1}{t-s} (t-s)^\gamma [f]_{C^\gamma}$$

implique que la fonction $s \mapsto e^{(t-s)A}(f(s) - f(t))$ est intégrable à valeur dans $D(A)$, telle que $u_1(t) \in D(A)$ pour tout $t \in [0, T]$.

Et pour $u_2(t)$, on sait que $e^{tA}x \in D(A)$ pour $t > 0$ et $\int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds \in D(A)$. De plus, on a

$$\begin{cases} Au_1(t) = \int_0^t Ae^{(t-s)A}(f(s) - f(t))ds, & 0 \leq t \leq T, \\ Au_2(t) = Ae^{tA}x + \int_0^t Ae^{(t-s)A}f(s)ds, \\ \quad = Ae^{tA}x + (e^{tA} - I)f(t), & 0 < t \leq T, \end{cases} \quad (2.12)$$

Si $x \in D(A)$, alors $Au_2(t)$ est vérifiée pour $t = 0$. On montre que $Au_1(t) \in C^\gamma([0, T]; X)$ Pour $0 \leq s < t \leq T$, on a

$$\begin{aligned} Au_1(t) - Au_1(s) &= \int_0^s (Ae^{(t-s)A}(f(\sigma) - f(t)) - Ae^{(s-\sigma)A}(f(\sigma) - f(s))) d\sigma \\ &\quad + \int_s^t Ae^{(t-\sigma)A}(f(\sigma) - f(t))d\sigma \\ &= \int_0^s (Ae^{(t-\sigma)A} - Ae^{(s-\sigma)A})(f(\sigma) - f(s)) d\sigma \\ &\quad + \int_0^s Ae^{(t-\sigma)A}(f(s) - f(t))d\sigma + \int_s^t Ae^{(t-\sigma)A}(f(\sigma) - f(t))d\sigma \\ &= \int_0^s \int_{s-\sigma}^{t-\sigma} A^2 e^{\tau A} d\tau (f(\sigma) - f(s)) d\sigma \\ &\quad + (e^{\tau A} - e^{(t-s)A})(f(s) - f(t)) + \int_s^t Ae^{(t-\sigma)A}(f(\sigma) - f(t))d\sigma. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \|Au_1(t) - Au_1(s)\| &\leq M_2 [f]_{C^\gamma} \int_0^s (s-\sigma)^\alpha \int_{s-\sigma}^{t-\sigma} \tau^{-2} d\tau d\sigma \\ &\quad + 2M_0 [f]_{C^\gamma} (t-s)^\gamma + M_1 [f]_{C^\gamma} \int_s^t (t-\sigma)^{\gamma-1} d\sigma \\ &\leq M_2 [f]_{C^\gamma} \int_0^s d\sigma \int_{s-\sigma}^{t-\sigma} \tau^{\gamma-2} d\tau + (2M_0 + M_1 \gamma^{-1}) [f]_{C^\gamma} (t-s)^\gamma \\ &\leq \left(\frac{M_2}{\gamma(1-\gamma)} + 2M_0 + \frac{M_1}{\gamma} \right) [f]_{C^\gamma} (t-s)^\gamma \end{aligned}$$

et $Au_2(t) \in C^\gamma([\epsilon, T]; X)$ pour $\epsilon \in (0, T)$ ce que implique $Au \in C^\gamma([\epsilon, T]; X)$.

En effet, $u \in C^\gamma([\epsilon, T]; X)$ (puisque $t \mapsto e^{tA}x \in C^\gamma((0, T]; X)$ et d'après la proposition 2.3 on a)

$$t \mapsto \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds \in C^\gamma([0, T]; X).$$

Et que $u \in C^\gamma([\epsilon, T]; \overline{D(A)})$ pour $\epsilon \in (0, T)$, alors $u \in C((0, T]; D(A))$.

Pour $t \rightarrow 0^+$ et si $x \in \overline{D(A)}$, alors on a la fonction $t \mapsto e^{tA}x \in C([0, T]; X)$.

Donc, $u \in C([0, T]; X)$ (voir la proposition 2.3). Si $x \in D(A)$, on peut écrire

$$Au_2(t) = e^{tA}(Ax + f(0)) + e^{tA}(f(t) - f(0)) - f(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.13)$$

Si $Ax + f(0) \in \overline{D(A)}$, alors $\lim_{t \rightarrow 0^+} Au_2(t) = Ax$, ($Au_2(t)$ est continue pour $t = 0$).

Donc, on conclut que $u = u_1 + u_2 \in C([0, T]; D(A))$ est une solution stricte de problème (2.1).

Et pour l'estimation (2.9) $u' = Au + f$ et

$$\|Au_1(t)\| \leq M_1 [f]_{C^\gamma} \int_0^t (t-s)^{\gamma-1} ds = \frac{M_1}{\gamma} [f]_{C^\gamma} t^\gamma$$

$$\|Au_2(t)\| \leq M_0 \|Ax\| + (M_0 + 1) \|f\|_\infty.$$

Donc, on peut conclure la preuve de 2.

Si, $Ax + f(0) \in D_A(\gamma, \infty)$, alors on a $t \mapsto e^{tA}(Ax + f(0)) \in C^\gamma([0, T]; X)$, avec

$$\|e^{tA}(Ax + f(0))\| \leq C \|(Ax + f(0))\|_{D_A(\gamma, \infty)} \quad \text{pour } C > 0.$$

De plus, on suppose que $f \in C^\gamma([0, T]; X)$, alors il reste à preuve que $t \mapsto e^{tA}(f(t) - f(0))$ est hölderienne. Pour $0 \leq s \leq t \leq T$, on a

$$\begin{aligned} \|e^{tA}(f(t) - f(0)) - e^{sA}(f(s) - f(0))\| &\leq \|(e^{tA} - e^{sA})(f(s) - f(0))\| + \|e^{tA}(f(t) - f(s))\| \\ &\leq s^\gamma [f]_{C^\gamma} \left\| A \int_0^t e^{\sigma A} d\sigma \right\|_{L(X)} + M_0 (t-s)^\gamma [f]_{C^\gamma} \\ &\leq M_1 [f]_{C^\gamma} s^\gamma \int_0^t \frac{d\sigma}{\sigma} + M_0 (t-s)^\gamma [f]_{C^\gamma} \\ &\leq M_1 [f]_{C^\gamma} \int_0^t \sigma^{\gamma-1} d\sigma + M_0 (t-s)^\gamma [f]_{C^\gamma} \\ &\leq \left(\frac{M_1}{\gamma} + M_0 \right) (t-s)^\gamma [f]_{C^\gamma}. \end{aligned}$$

Donc $Au_2(t)$ est hölderienne et l'estimation suivant est vérifiée

$$\|u\|_{C^{1+\gamma}([0, T]; X)} + \|Au\|_{C^\gamma([0, T]; X)} \leq C \left(\|f\|_{C^\gamma([0, T]; X)} + \|x\|_X + \|Ax + f(0)\|_{D_A(\gamma, \infty)} \right).$$

Pour $0 \leq t \leq T$, on a

$$u'(t) = \int_0^t A e^{(t-s)A} (f(s) - f(t)) ds + e^{tA} (f(t) - f(0)),$$

(on va estimer $[u'(t)]_{D_A(\gamma, \infty)}$) alors, pour $0 < \xi \leq 1$ on conclure

$$\begin{aligned}
\|\xi^{1-\gamma} A e^{\xi A} u'(t)\| &\leq \left\| \xi^{1-\gamma} \int_0^t A^2 e^{(t+\xi-s)A} (f(s) - f(t)) ds \right\| \\
&\quad + \left\| \xi^{1-\gamma} A e^{(1+\xi)A} (Ax + f(0)) \right\| + \left\| \xi^{1-\gamma} A e^{(1+\xi)A} (f(t) - f(0)) \right\| \\
&\leq M_2 [f]_{C^\gamma} \xi^{1-\gamma} \int_0^t (t-s)^\gamma (t+\xi-s)^{-2} ds \\
&\leq M_0 [Ax + f(0)]_{D_A(\gamma, \infty)} + M_1 [f]_{C^\gamma} \xi^{1-\gamma} (t+\xi)^{-1} t^\gamma \\
&\leq M_2 [f]_{C^\gamma} \int_0^\infty \sigma^\gamma (\sigma+1)^{-2} d\sigma + M_0 [Ax + f(0)]_{D_A(\gamma, \infty)} + M_1 [f]_{C^\gamma}.
\end{aligned}$$

Donc, $[u'(t)]_{D_A(\gamma, \infty)}$ est bornée dans $[0, T]$. ■

Remarque 2.2. La démonstration de théorème 2.1 implique que la condition $Ax + f(0) \in D_A(\gamma, \infty)$ est nécessaire pour que $Au \in C^\gamma([0, T]; X)$. Autrefois cette condition est satisfaite, elle reste vraie pour toute l'intervalle $[0, T]$, dans ce cas $Au(t) + f(t) = u'(t)$ appartient à $D_A(\gamma, \infty)$ pour tout $t \in [0, T]$.

Théorème 2.2. On suppose que $f \in C([0, T]; X) \cap B([0, T]; D_A(\gamma, \infty))$. Alors, la fonction $v = (e^{tA} * f)$ appartient à $C([0, T]; D(A)) \cap C^1([0, T]; X)$ est une solution stricte du problème suivant

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) + f(t), 0 < t \leq T, \\ v(0) = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

De plus, v' et Av sont dans $B([0, T]; D_A(\gamma, \infty))$, $Av \in C^\gamma([0, T]; X)$ et il existe C tel que

$$\|v'\|_{B([0, T]; D_A(\gamma, \infty))} + \|Av\|_{B([0, T]; D_A(\gamma, \infty))} + \|Av\|_{C^\gamma([0, T]; X)} \leq C \|f\|_{B([0, T]; D_A(\gamma, \infty))} \quad (2.15)$$

Démonstration. Pour $0 \leq t \leq T$, on suppose que $v(t) \in D(A)$ et on note $|f|$ la norme de f dans $B([0, T]; D_A(\gamma, \infty))$, alors on a

$$\|Av(t)\| \leq M_{1,\gamma} |f| \int_0^t (t-s)^{\gamma-1} ds \leq \frac{T^\gamma M_{1,\gamma}}{\gamma} |f|. \quad (2.16)$$

De plus, pour $0 < \xi \leq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\|\xi^{1-\gamma} A e^{\xi A} Av(t)\| &= \xi^{1-\gamma} \left\| \int_0^t A^2 e^{(1+\xi-s)A} f(s) ds \right\| \\
&\leq M_{2,\gamma} \xi^{1-\gamma} \int_0^t (t+\xi-s)^{\gamma-2} ds |f| \leq \frac{M_{2,\gamma}}{1-\gamma} |f|. \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Donc, $Av \in B([0, T]; D_A(\gamma, \infty))$.

Pour $0 \leq s \leq t \leq T$, on a

$$\begin{aligned} \|Av(t) - Av(s)\| &\leq \left\| A \int_0^s (e^{(t-\sigma)A} - e^{(s-\sigma)A}) f(\sigma) d\sigma \right\| + \left\| A \int_s^t e^{(t-\sigma)A} f(\sigma) d\sigma \right\| \\ &\leq M_{2,\gamma} |f| \int_0^s d\sigma \int_{s-\sigma}^{t-\sigma} \tau^{\gamma-2} d\tau + M_{1,\gamma} |f| \int_s^t (t-\sigma)^{\gamma-1} d\sigma \end{aligned}$$

$$\text{ce implique que } \|Av(t) - Av(s)\| \leq \left(\frac{M_{2,\gamma}}{\gamma(1-\gamma)} + \frac{M_{1,\gamma}}{\gamma} \right) (t-s)^\gamma |f|. \quad (2.18)$$

Alors, on déduit l'estimation (2.15) d'après les estimations (2.16), (2.17) et (2.18).

De le lemme 2.2, on obtient la différentiabilité de v .

■

Corollaire 2.1. Soient $x \in X$, $f \in C([0, T]; X) \cap B([0, T]; D_A(\gamma, \infty))$ avec $0 < \gamma < 1$ et u est donnée par la formule (2.2). Alors, $u \in C^1((0, T]; X) \cap C((0, T]; D(A))$ et $u \in B([\epsilon, T]; D_A(\gamma+1, \infty))$ pour tout $\epsilon \in (0, T)$. De plus, les affirmations suivantes sont satisfaites

- [1] Si $x \in \overline{D(A)}$, alors u est une solution classique de problème (2.1).
- [2] Si $x \in D(A)$ et $Ax \in \overline{D(A)}$, alors u est une solution stricte de problème (2.1).
- [3] Si $x \in D_A(\gamma+1, \infty)$, alors u' et Au appartiennent à $B([0, T]; D_A(\gamma, \infty)) \cap C([0, T]; X)$. De plus, Au est dans $C^\gamma([0, T]; X)$ et il existe $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned} &\|u'(t)\|_{B([0, T]; D_A(\gamma, \infty))} + \|Au\|_{B([0, T]; D_A(\gamma, \infty))} + \|Au\|_{C^\gamma([0, T]; X)} \\ &\leq \left(C \|f\|_{B([0, T]; D_A(\gamma, \infty))} + \|x\|_{D_A(\gamma, \infty)} \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Preuve. Soit $u(t) = e^{tA}x + (e^{tA} * f)(t)$.

Si $x \in \overline{D(A)}$, alors la fonction $t \mapsto e^{tA}x$ est une solution classique de problème de Cauchy homogène pour $t > 0$. Mais si $x \in D(A)$ et $Ax \in \overline{D(A)}$, u est une solution stricte.

La solution u est aussi solution stricte si $x \in D_A(\gamma+1, \infty)$ et appartient à $C^1([0, T]; X) \cap B([0, T]; D_A(\gamma+1, \infty))$.

En fin, de théorème 2.2 on obtient l'estimation (2.19).

■

2.4 La solution classique et mild dans le cas où $f \in L^1((0, T); X)$

Dans cette section, on définit le problème de Cauchy non-homogène suivant

$$(PNHC) \begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), & t > 0, \\ u(0) = x. \end{cases} \quad (2.20)$$

Où $f : [0, T[\rightarrow X$ est une fonction, A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$, par conséquent l'équation homogène correspondante à $f \equiv 0$ admet une solution unique pour tout $x \in D(A)$.

Définition 2.3. Soit $u : [0, T[\rightarrow X$ une fonction est dite solution classique de problème (2.20) sur $[0, T[$ si

- 1 u est continue sur $[0, T[$.
- 2 u est continûment différentiable sur $]0, T[$.
- 3 $u(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$ et u vérifiée (2.20) .

Proposition 2.4. Soit $f \in L^1((0, T); X)$, alors pour chaque $x \in X$ le problème (2.20) admet au plus une solution . Si la solution du problème (2.20) existe, alors

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \quad (2.21)$$

Preuve. Soient A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$, $f \in L^1((0, T); X)$ et $v(s) = T(t-s)u(s)$ est différentiable pour $0 < s < t$.

D'après la proposition 1.1 on obtient la dérivée de la fonction v

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds} &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)u'(s) \\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)(Au(s) + f(s)) \\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s) \\ &= T(t-s)f(s). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Par intégration de 2.22 sur $(0, t)$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^t v'(s)ds &= \int_0^t T(t-s)f(s)ds \\ v(s)|_0^t &= \int_0^t T(t-s)f(s)ds \\ &= T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \end{aligned}$$

■

Définition 2.4. Soient A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$, $x \in X$ et $f \in L^1((0, T); X)$. La fonction $u \in C([0, T]; X)$ donnée par

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.23)$$

est appelée la solution mild de problème (2.20) sur $[0, T]$.

Remarque 2.3. • La solution mild n'est pas en générale une solution classique du problème (2.20) même dans le cas où $f \equiv 0$.
 Contre exemple : Si $x \notin D(A)$ et $f \equiv 0$, alors $u(t) = T(t)x$ n'est pas différentiable en 0^+ .
 • Pour $f \in L^1((0, T); X)$ le problème (2.20) admet une solution mild unique.

2.5 Existence, unicité et régularité

Remarque 2.4. En générale, la continuité de f n'est pas suffisante pour assurer l'existence des solutions de problème (2.20) pour $x \in D(A)$.

Exemple 2.1. Soient A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$, $x \in X$ tel que $T(t)x \notin D(A)$ pour tout $t \geq 0$. On considère la fonction f définie par

$$f(s) = T(s)x, \quad 0 \leq s < T.$$

Alors, f est continue pour $s \geq 0$. Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + T(t)x, & t > 0, \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Le problème n'admet pas de solution même si $0 \in D(A)$. En effet, la solution mild de (2.24) est

$$u(t) = T(t)0 + \int_0^t T(t-s)T(s)x ds = tT(t)x.$$

n'est pas différentiable pour $t > 0$ et donc ne peut pas être une solution de problème (2.24).

Alors, on a besoin d'ajouter des conditions autres que la continuité de f .

Lemme 2.3. Soit $h : [a, b[\rightarrow X$ une fonction continue admettant une dérivée à droite h'_d continue sur $[a, b[$. Alors h est continûment différentiable sur $[a, b[$.

Démonstration. Voir [8].

■

Théorème 2.3. Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ et soit $f \in L^1((0, T); X)$ continue sur $]0, T]$ et soit v la fonction qui définie par

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.25)$$

Le problème (2.20) admet une solution u sur $[0, T[$ pour tout $x \in D(A)$ si l'une des conditions suivantes est vérifiée

- 1) v est continûment différentiable sur $]0, T[$.
- 2) $v(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$ et la fonction $t \rightarrow Av(t)$ est continue sur $]0, T[$.
 Réciproquement, si le problème (2.20) admet une solution u sur $[0, T[$ pour un certain $x \in D(A)$, alors v vérifie les conditions 1) et 2).

Démonstration. De la proposition 2.23 pour u la solution de problème (2.20) pour tout $x \in D(A)$ la solution donnée par la formule (2.21). Par conséquent $t \mapsto v(t) = u(t) - T(t)x$ est une fonction différentiable pour $t > 0$, $v'(t) = u'(t) - T(t)Ax$ est continue sur $]0, T[$ alors 1) est vérifiée.

De plus, si $x \in D(A)$, alors $T(t)x \in D(A)$ pour $t \geq 0$, donc $v \in D(A)$ pour $t > 0$ et

$$\begin{aligned} Av(t) &= Au(t) - AT(t)x, \\ &= u'(t) - f(t) - T(t)Ax. \end{aligned}$$

Alors, $t \mapsto Av(t)$ est continue sur $]0, T[$ ainsi 2) est vérifiée.

D'autre part, on a pour tout $h > 0$

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h}v(t) &= \frac{T(h)v(t)}{h} - \frac{v(t)}{h} \\ &= \frac{T(h)}{h} \int_0^t T(t-s)f(s)ds - \frac{v(t)}{h} \\ &= \frac{1}{h} \int_0^t T(h)T(t-s)f(s)ds - \frac{v(t)}{h} \\ &= \frac{1}{h} \int_0^t T(t+h-s)f(s)ds - \frac{v(t)}{h}, \quad 0 \leq t \leq t+h \leq T \\ &= \frac{1}{h} \int_0^t T(t+h-s)f(s)ds + \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds \\ &\quad - \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \frac{v(t)}{h} \\ &= -\frac{1}{h} \int_t^0 T(t+h-s)f(s)ds + \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds \\ &\quad - \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \frac{v(t)}{h} \\ &= \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \frac{v(t)}{h} \\ &\implies \frac{T(h) - I}{h}v(t) = \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds. \end{aligned} \tag{2.26}$$

On a f est continue, alors

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds = f(t).$$

- Si v est continûment différentiable sur $]0, T[$, alors de la formule (2.26) on déduit que $v(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$ et $Av(t) = v'(t) - f(t)$ et pour $v(0) = 0$ alors $u(t) = T(t)x + v(t)$ est la solution de problème (2.20) pour $x \in D(A)$.
- Si $v(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$, on a de l'égalité que v est différentiable à droite en t est donné par

$$v'_d(t) = Av(t) + f(t)$$

et de lemme (2.3) v est continûment différentiable sur $]0, T[$ et $v'(t) = Av(t) + f(t)$, car $v(0) = 0$, $u(t) = T(t)x + v(t)$ est la solution de problème (2.20) pour $x \in D(A)$. ■

Corollaire 2.2. Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$.

Si f est continûment différentiable sur $[0, T]$, alors le problème (2.20) admet une solution u sur $[0, T[$ pour tout $x \in D(A)$.

Démonstration. On définit la fonction v comme suit

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds = \int_0^t T(s)f(t-s)ds. \quad (2.27)$$

La fonction v est différentiable pour $t > 0$ et D'après l'intégrale de Leibniz, on a

$$\begin{aligned} v'(t) &= T(t)f(0) + \int_0^t T(s)f'(t-s)ds \\ &= T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)ds. \end{aligned}$$

D'où, v' est continue sur $]0, T[$. (La condition 1) de théorème 2.3 permet de conclure)

■

Corollaire 2.3. Soient A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ et $f \in L^1((0, T); X)$ une fonction continue sur $]0, T[$. Si $f(s) \in D(A)$ pour $0 < s < T$ et $s \mapsto Af(s) \in L^1((0, T); X)$, alors pour tout $x \in D(A)$ le problème (2.20) admet une solution sur $[0, T[$.

Démonstration. D'après les conditions du corollaire on a pour tout $s > 0$, $T(t-s)f(s) \in D(A)$ et la fonction $s \mapsto AT(t-s)f(s) = T(t-s)Af(s)$ est intégrable. Ainsi, pour $t > 0$, $v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds \in D(A)$ et

$$Av(t) = A \left(\int_0^t T(t-s)f(s)ds \right) = \int_0^t T(t-s)Af(s)ds \text{ est continue.}$$

Donc, on déduit que le problème (2.20) admet une solution sur $[0, T[$ (de la condition 2) de théorème 2.3).

■

Régularité

Dans cette partie, le problème (2.20) est valable pour $t = 0$.

Soient A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ et $f \in L^1((0, T); X)$. D'après corollaire (2.2) si $f \in C^1([0, T]; X)$, alors la solution mild devient une solution classique, (i.e une solution continûment différentiable de problème (2.20)). Si A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe analytique, nous obtenons un résultat qui est beaucoup plus fort.

Lemme 2.4. *Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow X$ une fonction lipschitzienne bornée. Alors, pour tout $\gamma \in]0, 1[$, g est hölderienne.*

Démonstration. Voir [1].

■

Théorème 2.4. *Soient A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe analytique $(T(t))_{t \geq 0}$ et $f \in L^p((0, T); X)$, avec $1 < p < \infty$. Si u est une solution mild de problème (2.20), alors u est hölderienne d'exposant $\frac{p-1}{p}$ sur $[\epsilon, T]$ pour tout $\epsilon > 0$. De plus, si $x \in D(A)$, alors u est hölderienne avec même exposant sur $[0, T]$.*

Démonstration. Voir [1] (la page 68+la page 48).

■

Théorème 2.5. *Soient A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe analytique $(T(t))_{t \geq 0}$, $f \in L^1((0, T); X)$.*

Supposons que pour tout $0 < t < T$, il existe $\delta_t > 0$ et $w_t : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est une fonction continue tels que

$$\|f(t) - f(s)\| \leq w_t(|t - s|) \quad (2.28)$$

et

$$\int_0^{\delta_t} \frac{w_t(\tau)}{\tau} d\tau < \infty. \quad (2.29)$$

Alors, pour tout $x \in X$, la solution mild de (2.20) est une solution classique.

Démonstration. Soient A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe analytique $(T(t))_{t \geq 0}$, $f \in L^1((0, T); X)$.

Pour montrer le théorème 2.5, on utilise le théorème 2.3, il suffit de montrer que

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds \in D(A) \quad \text{pour } 0 < t < T$$

et $t \mapsto Av(t)$ est continue sur $]0, T[$.

Alors

$$\begin{aligned}
v(t) &= \int_0^t T(t-s)f(s)ds \\
&= \int_0^t T(t-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(t)ds + \int_0^t T(t-s)f(t)ds \\
&= \int_0^t T(t-s)(f(s) - f(t))ds + \int_0^t T(t-s)f(t)ds \\
&= v_1(t) + v_2(t).
\end{aligned}$$

D'après la proposition 1.1 la caractérisation 2) on a $v_2(t) \in D(A)$ et $Av_2(t) = (I - T(t))f(t)$ et on a de l'équation (2.28) f est continue sur $]0, T[$ alors $t \mapsto Av_2(t)$ est continue sur $]0, T[$. Alors, reste à vérifier la même condition pour v_1 pour cela on définit

$$v_{1,\epsilon}(t) = \int_0^{t-\epsilon} T(t-s)(f(s) - f(t))ds, \quad \forall t \geq \epsilon$$

et

$$v_{1,\epsilon}(t) = 0, \quad \forall t < \epsilon$$

telle que $v_{1,\epsilon} \rightarrow v_1$ pour ϵ tend vers 0 et $v_{1,\epsilon} \in D(A)$. De plus, pour tout $t \geq \epsilon$

$$Av_{1,\epsilon}(t) = \int_0^{t-\epsilon} AT(t-s)(f(s) - f(t))ds,$$

et d'après les équations (2.28) et (2.29) implique que pour tout $t > 0$ $Av_{1,\epsilon}$ converge quand $\epsilon \rightarrow 0$ et

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} Av_{1,\epsilon}(t) = \int_0^t AT(t-s)(f(s) - f(t))ds.$$

Puisque A est fermé, alors $v_1(t) \in D(A)$ pour $t > 0$ et

$$Av_1(t) = \int_0^t AT(t-s)(f(s) - f(t))ds,$$

Plus précisément, on montre que $t \mapsto Av_1(t)$ est continue sur $]0, T[$.

Pour $0 < \delta < t$ on a

$$Av_1(t) = \int_0^\delta AT(t-s)(f(s) - f(t))ds + \int_\delta^t AT(t-s)(f(s) - f(t))ds,$$

pour $\delta > 0$ fixée on a

$$\begin{aligned}
Av_1(t) &= \int_0^\delta AT(t-s)(f(s) - f(t))ds + \int_\delta^t AT(t-s)(f(s) - f(t))ds \\
&= O(\delta) + \text{une fonction continue.}
\end{aligned}$$

Donc, $t \mapsto Av_1(t)$ est continue sur $]0, T[$. ■

Le corollaire suivant présente que si f est hölderienne, alors la solution mild 2.23 est une solution de problème (2.20).

Corollaire 2.4. Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe analytique $(T(t))_{t \geq 0}$. Si $f \in L^1((0, T); X)$ est localement hölderienne sur $]0, T]$, alors pour tout $x \in X$ le problème (2.20) admet une solution unique.

Lemme 2.5. Soient A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe analytique $(T(t))_{t \geq 0}$ et $f \in C^\gamma([0, T]; X)$.
Si

$$v_1(t) = \int_0^t T(t-s) (f(s) - f(t)) ds, \quad (2.30)$$

alors, $v_1(t) \in D(A)$ pour tout $0 \leq t \leq T$ et $t \mapsto Av_1(t) \in C^\gamma([0, T]; X)$.

Preuve. La démonstration de $v_1(t) \in D(A)$ pour tout $0 \leq t \leq T$ est détaillée dans la démonstration de théorème 2.5 .

Montrons que $t \mapsto Av_1(t)$ est hölderienne sur $[0, T]$. Soit $M \geq 1$ et $C \geq 0$ tels que

$$\|T(t)\| \leq M \text{ sur } [0, T]$$

et

$$\|AT(t)\| \leq \frac{C}{t} \text{ pour } 0 < t \leq T. \quad (2.31)$$

Alors, pour $0 < s < t \leq T$ on a

$$\begin{aligned} \|AT(t) - AT(s)\| &= \left\| \int_s^t A^2 T(\tau) d\tau \right\| \\ &\leq \int_s^t \|A^2 T(\tau)\| d\tau \\ &= \int_s^t \left\| AT\left(\frac{\tau}{2}\right) \right\|^2 d\tau \\ &\leq 4C' \int_s^t \frac{d\tau}{\tau^2} = 4 \frac{C'}{ts} (t-s). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Soit $t \geq 0$ et $h > 0$, alors

$$\begin{aligned} Av_1(t+h) - Av_1(t) &= A \int_0^t [T(t+h-s) - T(t-s)](f(s) - f(t)) ds \\ &\quad + A \int_0^t T(t+h-s)(f(t) - f(t+h)) ds \\ &\quad + A \int_t^{t+h} T(t+h-s)(f(s) - f(t+h)) ds \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Comme $f \in C^\gamma([0, T]; X)$ (notons C_h la constante de Hölder), alors d'après 2.32 , on a

$$\begin{aligned}
\|I_1\| &\leq \int_0^t \|AT(t+h-s) - AT(t-s)\| \|f(s) - f(t)\| ds \\
&\leq 4C'C_h h \int_0^t \frac{ds}{(t-s+h)(t-s)^{1-\gamma}} \\
&\leq C_1 h^\gamma.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

On utilise l'assertion 2) de la proposition 1.1 et que $f \in C^\gamma([0, T]; X)$, donc on a

$$\begin{aligned}
\|I_2\| &\leq \|(T(t+h) - T(h))(f(t) - f(t+h))\| \\
&\leq \|T(t+h) - T(h)\| \|f(t) - f(t+h)\| \\
&\leq 2MC_h h^\gamma.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Pour estimer I_3 on utilise l'estimation 2.31 et que $f \in C^\gamma([0, T]; X)$ alors on a

$$\begin{aligned}
\|I_3\| &\leq \int_t^{t+h} \|AT(t+h-s)\| \|f(s) - f(t+h)\| ds \\
&\leq CC_h \int_t^{t+h} (t+h-s)^{\gamma-1} ds \\
&\leq C_2 h^\gamma.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Par (2.33) et les estimations (2.34) (2.35) et (2.36) on déduit que $t \mapsto Av_1(t)$ est hölderienne sur $[0, T]$. ■

Le théorème suivant donne le résultat principal de régularité pour le cas où A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe analytique.

Théorème 2.6. *Soient A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe analytique $(T(t))_{t \geq 0}$ et $f \in C^\gamma([0, T]; X)$.*

Si u est la solution du problème (2.20), alors

- 1** *Pour tout, $\delta > 0$, $Au \in C^\gamma([\delta, T]; X)$ et $u' \in C^\gamma([\delta, T]; X)$.*
- 2** *Si $x \in D(A)$, alors Au et u' sont continues sur $[0, T[$.*
- 3** *Si $x = 0$ et $f(0) = 0$, alors $Au \in C^\gamma([0, T]; X)$ et $u' \in C^\gamma([0, T]; X)$.*

Preuve. On a

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds = T(t)x + v(t).$$

De 2.32 $t \mapsto AT(t)x$ est lipschitzienne sur $\delta \leq t \leq T$ pour tout $\delta > 0$, donc il suffit de montrer que $t \mapsto AT(t)x$ est dans $C^\gamma([\delta, T]; X)$. On a

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t T(t-s)(f(s) - f(t))ds + \int_0^t T(t-s)f(t)ds \\ &= v_1(t) + v_2(t). \end{aligned}$$

De lemme 2.5 $t \mapsto Av_1(t)$ est dans $C^\gamma([0, T]; X)$. Donc on montre que $t \mapsto Av_2(t)$ est dans $C^\gamma([\delta, T]; X)$ pour tout $\delta > 0$. On a $Av_2(t) = (T(t) - I)f(t)$ et comme $f \in C^\gamma([0, T]; X)$ il suffit de montrer que $T(t)f(t) \in C^\gamma([\delta, T]; X)$. Pour tout $\delta > 0$, soit $t \geq \delta$ et $h > 0$, alors

$$\begin{aligned} \|T(t+h)f(t+h) - T(t)f(t)\| &\leq \|T(t+h)\| \|f(t+h) - f(t)\| + \|T(t+h) - T(t)\| \|f(t)\| \\ &\leq MLh^\gamma + \frac{C}{\delta}h \|f\|_\infty \\ &\leq C_1h^\gamma. \end{aligned}$$

D'après la preuve de théorème 2.4 et $f \in C^\gamma([0, T]; X)$ avec L la constante de Hölder et

$$\|f\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|.$$

Ce qui prouve 1).

Pour 2) notons d'abord que si $x \in D(A)$, alors $t \mapsto AT(t)x \in C([0, T]; X)$. Par le lemme 2.5 on a l'application $t \mapsto Av_1(t)$ est dans $C^\gamma([0, T]; X)$ et comme f est continue sur $[0, T]$ il reste à montrer que $t \mapsto T(t)f(t)$ est continue sur $[0, T]$.

D'après 1) on a $t \mapsto T(t)f(t)$ est continue sur $]0, T]$. La continuité en $t = 0$ on trouve

$$\|T(t)f(t) - f(0)\| \leq \|T(t)f(0) - f(0)\| + M \|f(t) - f(0)\|,$$

d'où 2).

Pour montrer 3) on montre que $t \mapsto T(t)f(t) \in C^\gamma([0, T]; X)$. Alors

$$\begin{aligned} \|T(t+h)f(t+h) - T(t)f(t)\| &\leq \|T(t+h)\| \|f(t+h) - f(t)\| + \|(T(t+h) - T(t))f(t)\| \\ &\leq MLh^\gamma + \left\| \int_t^{t+h} AT(\tau)f(t)d\tau \right\| \\ &\leq MLh^\gamma + CL \int_t^{t+h} \tau^{\gamma-1}d\tau \\ &\leq Ch^\gamma. \end{aligned}$$

■

2.6 Applications

Dans cette partie, on donne quelques applications de l'étude du problème de Cauchy abstrait pour obtenir la résolution de quelques équations aux dérivées partielles.

L'équation d'advection

$$(EA) \begin{cases} \frac{dv}{dt}(x, t) + \frac{dv}{dx}(x, t) = 0, & t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \\ v(x, 0) = g(x). \end{cases}$$

On rend cette équation à (PHCA) en posant $u(t) = v(., t)$, $X = L^2(\mathbb{R})$ et $A = -\frac{d}{dx}$, avec $D(A) = H^1(\mathbb{R}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}), u' \in L^2(\mathbb{R})\}$. Alors, on obtient

$$(PHCA) \begin{cases} u'(t) = Au(t), & t \geq 0, \\ u(0) = g. \end{cases}$$

On sait que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe défini sur X par

$$(T(t)g)(x) = g(x - t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

On obtient ce résultat

Théorème 2.7. *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ sur X . Alors pour tout $x \in D(A)$ la fonction qui définit par*

$$u(t) = T(t)x,$$

est une solution classique de problème (PHC) .

Démonstration. Voir [1].

■

Donc, pour tout $g \in D(A)$ la fonction u qui définit par $u(x, t) = (T(t)g)(x) = g(x - t)$, est une solution classique de (EA).

L'équation des ondes

Considérons l'équation des ondes qui décrit les phénomènes de propagation

$$(EO) \begin{cases} \frac{d^2v}{dt^2} - \Delta v = 0, & \text{sur } \Omega \times [0, t], \\ v = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times [0, t], \\ v(x, 0) = v_0, & \text{sur } \Omega, \\ \frac{dv}{dt}(x, 0) = v_1, & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

où Ω est un sous-ensemble régulier de \mathbb{R}^N et $v_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $v_1 \in H_0^1(\Omega)$.

En posant $u = \begin{pmatrix} v \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix}$, $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1$ où

$$Au = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ \Delta u_1 \end{pmatrix} \text{ et } u_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}. \text{ Alors, on obtient}$$

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

L'équation de la chaleur dans \mathbb{R}^N

On considère le suivant

$$\begin{cases} u_t(t, x) = \Delta u(t, x), & t > 0, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u(0, x) = f(x). \end{cases} \quad (2.37)$$

Où f une fonction dans X telle que $X = L^p(\mathbb{R}^N)$ ou bien $X = C_b(\mathbb{R}^N)$. Si $N = 1$ et $X = L^p(\mathbb{R})$ on a $D(A) = W^{2,p}(\mathbb{R})$ et $D(A) = C_b^2(\mathbb{R})$ si $X = C_b(\mathbb{R})$

On applique la transformation de fourier on obtient

$$\begin{cases} \hat{u}_t(t, \xi) = -|\xi|^2 \hat{u}(t, \xi), & t > 0, & \xi \in \mathbb{R}^N, \\ \hat{u}(0, \xi) = \hat{f}(\xi). \end{cases} \quad (2.38)$$

Telle que la solution de problème (2.38) est

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(\xi) e^{-|\xi|^2 t},$$

et par la transformée de fourier inverse, on obtient

$$u = T(\cdot) f$$

où la famille $\{T(t)_{t \geq 0}\}$ est un semi-groupe de la chaleur définie par Gaussien

$$(T(t)f)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (2.39)$$

Donc, on vérifié que la formule (2.39) est une solution de problème (2.38) .

- On note que

$$T(t)f = G_t * f,$$

tel que

$$G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad \int_{\mathbb{R}^N} G_t(x) dx = 1, \quad t > 0, \quad \frac{dG_t}{dt} = \Delta G_t.$$

Par l'inégalité de Young on a

$$\|T(t)f\|_p \leq \|f\|_p, \quad t > 0, \quad 1 \leq p \leq +\infty.$$

et on a

$$G_t \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N), \quad 1 \leq p \leq +\infty,$$

ce que implique

$$u(t, x) = (T(t)f)(x) \in C^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{R}^N).$$

- On vérifie la condition initiale

on a $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = f(x)$ d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue et par le semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur $BC\mathbb{R}$ appelé le semi-groupe de Gauss-Weierstrass

$$(T(t)f)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \text{ et } T(0) = I.$$

Donc $T(t)f \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} f$ dans $BC\mathbb{R}$ (l'espace des fonctions bornées continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R}) si et seulement si $f \in BUC\mathbb{R}$ (l'espace des fonctions bornées uniformément continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R}).

Le semi-groupe de Gauss-Weierstrass n'est pas un C_0 semi-groupe.

Comme u est bornée et différentiable, alors est une solution classique unique à l'équation de la chaleur dans l'intervalle $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^N$.

Chapitre 3

Les différentes solutions d'une EDA de second ordre

L'objet de ce chapitre est de présenter des résultats pour le type des solutions d'une équation différentielle abstraite de second ordre de type elliptique avec des conditions aux limites non local dans un espace de Hölder sans faire des démonstrations (pour plus détails voir[3])

3.1 Position du problème et Hypothèses

On considère le problème abstrait suivant

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x), & x \in [0, 1[, \\ u(0) = u_0, \\ u(1) + Hu'(0) = u_{1,0}. \end{cases} \quad (3.1)$$

X est un espace de Banach complexe, avec les conditions aux limites non locales $u_0, u_{1,0} \in X$. A, H sont des opérateurs linéaires fermés de domaine respectifs $D(A), D(H)$ dans X et $f \in C^\gamma([0, 1]; X)$, avec $0 < \gamma < 1$.

On utilise les hypothèses suivantes :

- Concernant les hypothèses sur les opérateurs A et H , on a

$$[0, +\infty[\subset \rho(A) \text{ et } \sup_{\lambda \geq 0} \|\lambda(A - \lambda I)^{-1}\|_{L(X)} < +\infty \quad (H1)$$

ce que implique $\phi = -(-A)^{\frac{1}{2}}$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique généralisé

$$D(\phi) \subset D(H), \quad (H2)$$

$$\forall \zeta \in D(H) : A^{-1}H\zeta = HA^{-1}\zeta, \quad (H3)$$

- On définit l'opérateur linéaire borné Λ par

$$\begin{aligned} \Lambda &= -2H\phi e^\phi + I - e^{2\phi} \\ 0 &\in \rho(\Lambda), \end{aligned} \quad (H4)$$

3.2 Les types des solutions du problème (3.1)

Définition 3.1. *Le problème (3.1) admet trois types de la solution .*

- *Une solution semi-classique u du problème (3.1) est une fonction qui vérifiée*

$$u \in C([0, 1]; X) \cap C^2([0, 1[; X) \cap C([0, 1]; D(A))$$

et satisfaite le problème (3.1) .

- *On dit que u est une solution semi-stricte de problème (3.1) si elle vérifiée*

$$u \in C^1([0, 1]; X) \cap C([0, 1]; D(\phi))$$

- *Une fonction u est dit solution stricte de problème (3.1) si*

$$u \in C^2([0, 1]; X) \cap C([0, 1]; D(A))$$

et vérifie le problème (3.1) .

De plus, quand $H = 0$ et sous l'hypothèse H1 , u admet une solution stricte si et seulement si $u_0, u_{1,0} \in D(A)$ et $f(0) - Au_0, f(1) - Au_{1,0} \in \overline{D(A)}$.

3.3 Résultat principal

Théorème 3.1. *On suppose que les hypothèses $(H1) \sim (H4)$ sont vérifiées et $u_0, u_{1,0} \in D(A)$, $f \in C^\gamma([0, 1]; X)$, $0 < \gamma < 1$. Alors*

- *Il existe une solution u est une solution semi-classique de problème (3.1) si et seulement si*

$$Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}$$

- *Le problème (3.1) admet une solution u semi-stricte si et seulement si*

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}, \\ H\phi^{-1}[Au_0 - f(0) + J_f] \in D(\phi) \text{ et} \\ \phi H\phi^{-1}[Au_0 - f(0) + J_f] \in \overline{D(A)}. \end{cases}$$

- *Le problème admet une solution u solution stricte si et seulement si*

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}, \\ H\phi^{-1}[Au_0 - f(0) + J_f] \in D(A) \text{ et} \\ \phi^2 H\phi^{-1}[Au_0 - f(0) + J_f] - [Au_{1,0} - f(1)] \in \overline{D(A)}. \end{cases}$$

Telle que $J_f = \phi \int_0^1 e^{s\phi}(f(s) - f(0))ds$.

Preuve. Voir [3].

■

Cas particulier

On considère le problème suivant dans le cas où l'opérateur $H = \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x), & x \in [0, 1[, \\ u(0) = u_0, \\ \alpha u'(0) + u(1) = u_{1,0}, \end{cases} \quad (3.2)$$

Nos hypothèses sur l'opérateur A est

$$\begin{cases} A \text{ est un opérateur fermé dans } X, \sigma(A) \subset]-\infty, 0[\text{ et} \\ \text{pour tout } \theta \in]0, \pi[, \sup_{\lambda \in S_\theta} \|\lambda(A - \lambda I)^{-1}\|_{L(X)} < +\infty \end{cases} \quad (3.3)$$

Donc, on a le résultat suivant

Théorème 3.2. *Supposons que $u_0, u_{1,0} \in D(A)$ et $f \in C^\gamma([0, 1]; X)$ et l'hypothèse 3.3 soit vérifiée. Alors*

- le problème (3.2) admet une solution u semi-strictement unique si et seulement si

$$Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}.$$

- le problème (3.2) admet une solution u strictement unique si et seulement si

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}, \\ Au_0 - f(0) + J_f \in D(\phi) \text{ et } \alpha \phi[Au_0 - f(0) + J_f] - [Au_{1,0} - f(1)] \in \overline{D(A)}. \end{cases}$$

3.4 Application

Exemple 3.1. Soit H un opérateur linéaire dans $X = C([0, 1])$ défini par

$$\begin{cases} D(H) = \{v \in C^2([0, 1]); v(0) = v(1) = 0\} \\ Hv = v'', \quad v \in D(H). \end{cases}$$

Pour $c > 0$ fixée, posons

$$A = -H^2 - cI,$$

telle que A satisfait les hypothèses (3.3) et (H1). De plus, car

$$\begin{cases} D(A) = \{v \in C^4([0, 1]); v(0) = v(1) = v''(0) = v''(1) = 0\} \\ Av = -v^{(4)} - cv, \quad v \in D(A). \end{cases}$$

alors, on peut étudier le problème non local d'EDP suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 u}{dx^2}(x, y) - \frac{d^4 u}{dy^4}(x, y) - cu(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in (0, 1), \\ u(x, 0) = u(x, 1) = \frac{d^2 u}{dy^2}(x, 0) = \frac{d^2 u}{dy^2}(x, 1) = 0, \quad x \in (0, 1), \\ u(0, y) = u_0(y), \quad y \in (0, 1), \\ u(1, y) + \frac{d^3 u}{dy^2 dx}(0, y) = u_{1,0}(y), \quad y \in (0, 1). \end{array} \right. \quad (3.4)$$

On a $D(A)$ n'est pas dense dans $X = C([0, 1])$ car

$$\overline{D(A)} = \overline{D(H)} = \{v \in C([0, 1]); v(0) = v(1) = 0\} \text{ et } D_A(\gamma/2, \infty) = \{v \in C^\gamma([0, 1]); v(0) = v(1) = 0\}.$$

Donc, on peut appliquer le théorème 3.1. Alors, on obtient

Théorème 3.3. pour toute, $f \in C^\gamma([0, 1]; X)$, $u_0, u_{1,0} \in C^4([0, 1])$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(0) = u_0(1) = u_0''(0) = u_0''(1) = 0, \\ u_{1,0}(0) = u_{1,0}(1) = u_{1,0}''(0) = u_{1,0}''(1) = 0 \text{ vérifiant.} \end{array} \right.$$

Alors, on a le problème (3.4) admet une solution u semi-classique unique.

Si $u(\cdot) + f(0, \cdot) \in C([0, 1])$ et $u_0^{(4)}(0) + f(0, 0) = u_0^{(4)}(1) + f(0, 1) = 0$.

Bibliographie

- [1] S-A, CHORFI. *Théorie de semi-groupes :Problème abstrait de Cauchy et equations d'évolution*, Université Cadi Ayyad-Marroco- **2017**.
- [2] L. C, Evans. *Partial differential equations*. Departement of mathematics university of California, Berkely, Volume **19**.
- [3] H. HAMMOU, R. Labbas, S. Maingot and A. Medeghri. On some elliptic problems with nonlocal coefficient-operator conditions in the framework of hölderienne spaces. EJQTDE, 36 :1-32, **2013**.
- [4] L Lorenzi, A Lunardi, G Metafune, D Pallara. *Analytic semigroups and reaction-diffusion problems*. Internet seminar, **February 16,2005**.
- [5] A. Lunardi. *Analytic semi groups and optimal regularity in parabolic problems*, Birkhäuser, Basel, **1995**.
- [6] Maëlis. Meisner. *Étude unifiée d'équations aux dérivées partielles de type elliptique régies par des équations différentielles à coefficients opérateurs dans un cadre non commutatif :applications concrètes dans les espaces de Hölder et les espaces L^p* , Université de Havre.(Thèse de doctorat), **2012**.
- [7] F. Z, MEZGHRNI. *Sur quelques problèmes elliptiques sous forme abstraite de type mêlé*, Université d'Oran.(mémoire de Magister), **2012**.
- [8] A. Pazy. *Semigroupe of Linear Operators and Applications to Partial Diferential Equation*. Berlin, Heidelberg, Tokyo, **1983**.
- [9] E. Sinestrari. On the Abstract Cauchy Problem of Parabolic Type in Spaces of continuous functions, J. math. Anal App, 66(**1985**), 16-66.

Résumé

Résumé

Ce travail présente les différents types des solutions pour des équations différentielles abstraites (à coefficients opérateurs) dans l'espace de Hölder et l'espace L^1 . La première partie étudie ces solutions pour le problème de Cauchy abstrait et la deuxième partie de travail présente deux types des solutions (semi-classiques, stricte) pour une équation différentielle abstraite de second ordre de type elliptique.

Mots clé : Solution classique, solution stricte, solution mild, équation différentielle abstraite, semi-groupe analytique.

Abstract

This work presents a different types of solutions for abstract differential equation in Hölder space and L^1 . The first parts studies these solutions for abstract Cauchy problems. The second part treats two types for second order elliptic abstract differential equation.

Keywords : Classical solution, strict solution, mild solution, abstract differential equation, analytic semi group.
